Критерии оценивания

Максимальное количество баллов за работу — **100**.

№ задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Приведён верный пример — 10 баллов Если в решении приведён верный пример с нецелыми a и b, баллы не снижаем	10
2	Приведено верное доказательство — 10 баллов	10
3	Дан верный ответ — 15 баллов. В неполном ответе каждый отрезок 11–19, 20–24, 25–36 оценивается в 5 баллов. Если в отрезке не найдены какие-то числа либо указаны лишние — снимать баллы в зависимости от количества ошибок	15
4	Приведено верное доказательство — 20 баллов Доказана параллельность оснований трапеции — 10 балов за продвижение. Доказано, что боковые стороны трапеции равны, — 10 баллов за продвижение. Доказано, что $LH = HC$, но не доказано, что боковые стороны равны, — 5 баллов за продвижение	20
5	Приведена верная и обоснованная стратегия — 25 баллов. Приведена работающая стратегия с разбором всех случаев, но не объяснено, почему она работает, — не более 15 баллов. Приведены общие слова о том, что стратегия наверняка найдётся, без конкретных ходов — 0 баллов	25
6	Приведён верный пример и доказано, что больше получить нельзя, — 20 баллов. Дан ответ без пояснений — не более 5 баллов. Приведён верный пример, но нет доказательства оценки — 10 баллов. Доказано, что сумма соседних чисел не больше 19, или сказано, что соседние числа не равны 10 одновременно, — 5 баллов за продвижение	20

ЗАДАНИЕ 1

Подберите ненулевые числа a и b так, чтобы выполнялось равенство
$(a \cdot 7^a)^a = b \cdot 7^9$.

Достаточно привести один пример.

Решение:

$(a \cdot 7^a)^a = b \cdot 7^9$;

$a^a \cdot 7^{a^2} = b \cdot 7^9$.

Возможный пример: $a = 3,\ b = a^a = 3^3 = 27$.

Есть и другие примеры.

ЗАДАНИЕ 2

В классе у всех учеников числа дат рождений различны. Если в класс придёт новый ученик, то это условие обязательно нарушится. Докажите, что минимум у 3 учеников класса месяцы рождения совпадут.

Решение:

Если с приходом ученика условие нарушается, то в классе был 31 ученик и дни рождения приходятся на все числа от 1 до 31.

Допустим, что в каждом месяце родилось не больше 2 учеников, тогда всего не более 24 учеников, а у нас их 31. Полученное противоречие доказывает, что найдётся месяц, в который родились минимум 3 ученика.

ЗАДАНИЕ 3

В куче $n > 10$ камней. За один ход можно сделать одно из действий:

· убрать из кучи 2 камня;

· убрать из кучи 3 камня;

· уменьшить количество камней в куче в 2 раза (если количество камней чётно).

Найдите все значения n, при которых нельзя за один ход получить в куче меньше 10 камней, а за 2 хода — можно.

В решении достаточно перечислить все такие n.

Решение:

Ответ: 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 28, 32, 36.

Разберём все числа по порядку. 11 — можно в 1 ход (−2);

12 — можно в 1 ход (−3);

13 — минимум в 2 хода (−2, −2);

14 — можно в 1 ход (:2);

15 — минимум в 2 хода (−3, −3);

16 — можно в 1 ход (:2);

17 — минимум в 2 хода (−3, :2);

18 — можно в 1 ход (:2);

19 — минимум в 2 хода (−3, :2);

20 — минимум в 2 хода (−2, :2);

21 — минимум в 2 хода (−3, :2);

22 — минимум в 2 хода (:2, −3);

23 — больше 2 ходов;

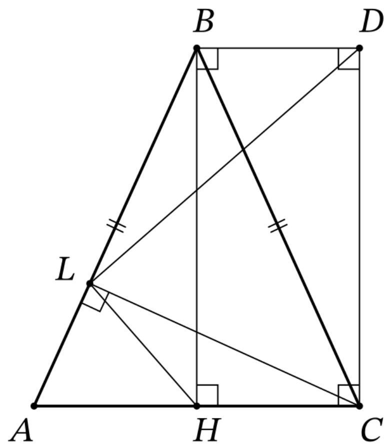
24 — минимум в 2 хода (:2, −3).

Рассмотрим вариант, когда $n \geq 25$. Заметим, что если в первый раз не делить на 2, то получится число, не меньшее 22, а из такого за один ход нельзя получить менее 10 камней.

После первого деления получится число, не меньшее 13, из таких чисел получить менее 10 камней можно только повторным делением. Значит, нам нужны числа, делящиеся на 4 и дающие в частном число, меньшее 10. Это 28, 32, 36.

ЗАДАНИЕ 4

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены высоты BH и CL. Точка D такова, что $BDCH$ — прямоугольник. Докажите, что $HLBD$ — равнобедренная трапеция.



Решение:

1) Проведём LH и HD.

2) Так как BH — высота, а $\triangle ABC$ — равнобедренный, то BH — медиана $\Rightarrow AH = HC$.

3) $\triangle ALC$ — прямоугольный, LHC — медиана $\Rightarrow LH = HC$.

4) Так как $HCOB$ — прямоугольник $\Rightarrow HC = BD \Rightarrow LH = BD$.

5) $\triangle AHB = \triangle HBD$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow \angle ADH = \angle HBD \Rightarrow LB \parallel HD$ (так как BH — секущая и $\angle ABH = \angle BHD$).

В четырёхугольнике $HLBD$ противоположные стороны DH и LB параллельны, а другие противоположные стороны HL и BD равны. Следовательно, $HLBD$ — равнобедренная трапеция.

ЗАДАНИЕ 5

Петя и Вася играют в следующую игру. Они записали в тетради уравнения трёх прямых вида $y = kx + b$, но вместо коэффициентов написали звёздочки:

$y = * x + *$,

$y = * x + *$,

$y = * x + *$.

Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом можно заменить одну из звёздочек на одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (можно использовать числа несколько раз). Вася выигрывает, если получившиеся три прямые имеют общую точку, иначе — выигрывает Петя. Покажите, как нужно действовать Васе, чтобы выиграть при любых ходах Пети.

В решении необходимо не только предоставить стратегию, но и объяснить, почему Вася выигрывает при любых действиях Пети.

Решение:

Обозначим коэффициенты уравнения, как показано ниже:

1) $y = k_1 x + b_1$;

2) $y = k_2 x + b_2$;

3) $y = k_3 x + b_3$.

Первая возможная стратегия

Если Петя заменит один из коэффициентов k или b уравнения, то мы ставим то же число вместо второго коэффициента этого уравнения. Таким образом, получатся три прямые вида $ax + a$, которые всегда проходят через точку (−1; 1).

Вторая возможная стратегия

Если Петя заменит один из коэффициентов k или b уравнения, то мы заменим второй коэффициент на число, дающее с Петиным сумму 7. Такое всегда можно сделать, так как

$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$.

Таким образом, полученные уравнения будут с суммой коэффициентов, равной 7, а значит, все такие прямые проходят через точку (1; 7).

Возможно, существуют и другие стратегии.

ЗАДАНИЕ 6

На столе в ряд стоит 10 чашек, занумерованных слева направо числами от 1 до 10. В каждой чашке лежит не более 10 вишен, а количество вишен в любых соседних чашках отличается ровно на один. В чашках с номерами 1, 4, 7, 10 вместе 34 вишен. Какое наибольшее количество вишен может быть во всех чашках?

В решении необходимо не только предоставить ответ, но доказать, что большее количество вишен лежать не может.

Решение:

Пример на 91 вишню: **8**, 9, 10, **9**, 10, 9, **8**, 9, 10, **9**.

Сумма вишен в чашках с номерами 1, 4, 7, 10 равна 8 + 9 + 8 + 9 = 34.

Заметим, что сумма вишен в двух рядом стоящих чашках не больше 19, так как оба числа не могут быть 10, максимум 9 + 10.

Тогда общая сумма не больше, чем 34 + сумма 3 пар рядом стоящих чашек, то есть не больше $34 + 3 \cdot 19 = 91$.